TEMA 5:

Integración múltiple

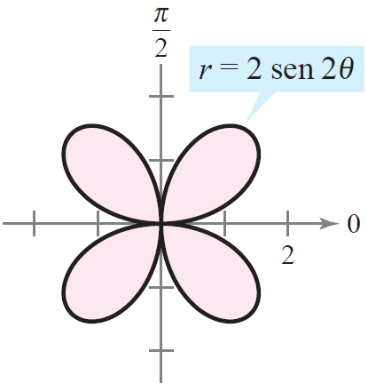
FMIBII

Biomedical engineering degree

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

1. Un experto en tratamiento de imágenes médicas, está estudiando las posibilidades que ofrecen las integrales dobles para solucionar algunos problemas de cálculo de áreas y volúmenes, que se le plantean con respecto a una batería de imágenes que está analizando.

    a. Utilice una integral doble para calcular el área de la región sombreada de la siguiente imagen:



    b. Calcule el volumen del sólido restante después de perforar un orificio de radio b a través del centro de una esfera de radio R ($b < R$).

    NOTA: Este enunciado da lugar a dos interpretaciones, plantee las dos posibilidades:

    i. El hueco creado en la esfera es un orificio pasante cilíndrico de radio b.

    ii. El hueco creado en la esfera es el resultado de quitarle a la esfera de radio R una esfera interior de radio b, ambas centradas en el origen.

    En ambos casos, tenga en cuenta la simetría del problema y esboce la figura para plantear más fácilmente la integral necesaria para resolver el problema.

2. Un estudiante de ingeniería biomédica, está aprendiendo a realizar cambios de coordenadas para resolver integrales dobles y triples. Resuelva los problemas que se plantean a continuación para que le sirvan de ejemplo y le ayuden con el estudio.

   a. Combine la suma de las dos integrales iteradas que se adjuntan a continuación en una sola integral utilizando un cambio a coordenadas polares. Posteriormente, evalúe la integral iterada resultante.

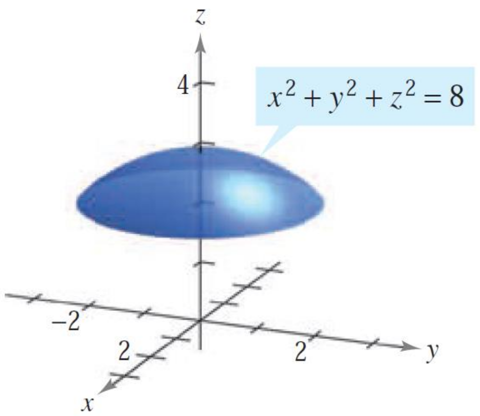
      NOTA: Dibuje la región *R* del plano *XY* que queda acotada por los límites de integración de la integral dada en coordenadas cartesianas, para que le sirva de ayuda a la hora de realizar el cambio de coordenadas y establecer los nuevos límites de integración.

$$\int_0^{8/\sqrt{13}} \int_0^{3x/2} xy \, dy \, dx + \int_{8/\sqrt{13}}^{4} \int_0^{\sqrt{16-x^2}} xy \, dy \, dx$$

   b. La figura que se adjunta a continuación muestra un sólido acotado inferiormente por el plano $z = 2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.

      i. Halle el volumen del sólido planteando una integral triple utilizando coordenadas cilíndricas.

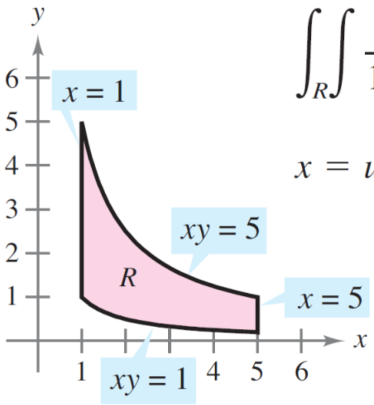
      ii. Plantee la integral triple que habría que resolver si se quisiera calcular el volumen del sólido utilizando coordenadas esféricas.



   c. Dibuje y calcule el volumen de la región sólida *Q* limitada inferiormente por la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, planteando una integral triple en coordenadas esféricas.

      NOTA: Tenga en cuenta que el vértice del cono está justo en el origen de coordenadas, y que se va "abriendo" hacia valores positivos de *z*.

d. Utilice el cambio de variables indicado para evaluar la siguiente integral doble:



$$\int\int_R \frac{x}{1 + x^2y^2}\, dA$$

$$x = u, \quad y = \frac{v}{u}$$

3. Dos de las piezas de una prótesis ósea que va a ser utilizada para reconstruir el fémur de un paciente vienen dadas por las regiones sólidas Q_1 y Q_2:

   a. $Q_1 = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, 0 \leq z \leq 6\}$

   Esboce la región Q_1 y escriba las seis integrales (teniendo en cuenta los seis posibles órdenes de integración y describiendo en cada caso los límites de integración correspondientes) que podrían utilizarse para obtener la siguiente integral triple (en cartesianas) sobre dicha región:

$$\iiint_{Q_1} xyz\, dV$$

   b. Calcule, utilizando una integral triple en coordenadas cilíndricas, el volumen del sólido Q_2, que viene dado por:

   $Q_2 = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq 4\}$

   Compruebe posteriormente el resultado obtenido aplicando directamente la fórmula que calcula el volumen de la figura geométrica conocida que forma Q_2.

   c. Repita el apartado *b*, pero esta vez, utilizando coordenadas cartesianas, y compruebe que el resultado obtenido coincide con el anterior.

   NOTA:

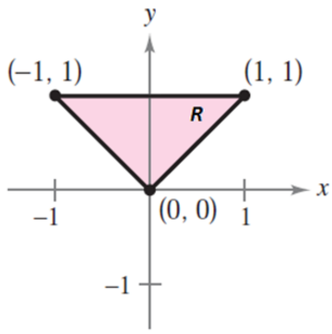
   - Cambio de variable recomendado para resolver esta integral: $x = 3\, sen\, u$
   - Identidades trigonométricas útiles:

     $cos^2 u = \frac{1 + cos\ 2u}{2}$, $sen\ 2u = 2\, cos\, u\, sen\, u$

4. Los jacobianos son muy útiles en sistemas que estudian la topología de imágenes cerebrales, por tanto, es necesario saber utilizarlos correctamente para ser capaces posteriormente de trabajar con este tipo de sistemas. Para ello, se proponen una serie de ejercicios:

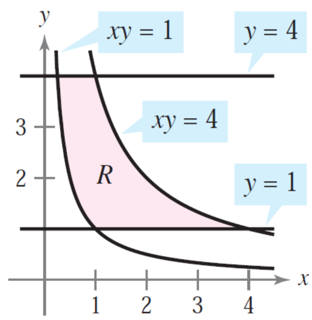
   a. Resuelva la siguiente integral doble $\iint_R 4(x+y)e^{x-y}\,dA$ teniendo en cuenta la geometría de *R* y utilizando el siguiente cambio de variable:

$$x = \frac{1}{2}(u+v)$$
$$y = \frac{1}{2}(u-v)$$



   b. Resuelva ahora la siguiente integral doble $\iint_R y\, sen(xy)\,dA$, teniendo en cuenta la geometría de *R,* y utilizando el siguiente cambio de variable:

$$x = \frac{u}{v}$$
$$y = v$$



   c. Hasta ahora, hemos utilizado el jacobiano para realizar transformaciones en (*x*, *y*) pero también puede utilizarse para realizar transformaciones en (*x*, *y*, *z*).

   Si *x* = *f*(*u*, *v*, *w*), *y* = *g*(*u*, *v*, *w*) y *z* =*h*(*u*, *v*, *w*), entonces el jacobiano de (*x*, *y*, *z*) con respecto a (*u*, *v*, *w*) es:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

      i. Calcule el jacobiano que habría que utilizar para expresar una integral triple en coordenadas esféricas (*u* = *ρ*, *v* = *ϑ*, *w* = ϕ), teniendo en cuenta que, en este caso:

$$x = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta,\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z = \rho\cos\phi$$

ii. Exprese la siguiente integral en función del resultado obtenido, sustituyendo *f*(*u*, *v*, *w*), *g*(*u*, *v*, *w*), *h*(*u*, *v*, *w*), el jacobiano y *du*, *dv*, *dw* por las expresiones correspondientes:

$$\iiint_Q m(x,y,z)dxdydz =$$
$$= \iiint_T m(f(u,v,w),g(u,v,w),h(u,v,w)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

NOTA: *m* es una función de tres variables, que depende de (*x*, *y*, *z*), es decir: *m* = *m* (*x*, *y*, *z*).